La courbe de la répartition de la richesse

Vilfredo Pareto, Lausanne, 1896

L'impôt sur le revenu nous fournit, pour plusieurs pays, des renseignements précieux sur la répartition des richesses.

Sans exagérer la rigueur de ces statistiques, qui se ressentent toujours plus ou moins des efforts que font les contribuables pour échapper à l'impôt, on peut prendre les chiffres qu'elles nous fournissent comme une représentation au moins approximative du phénomène. Nous nous proposons d'examiner si ces chiffres se distribuent au hasard, ou s'ils se groupent suivant quelque loi.

Nous adopterons les notations suivantes : *x* indiquera un certain revenu ; N sera le nombre de revenus qui seront égaux ou supérieurs à *x*.

Prenons d'abord, comme exemple, les résultats obtenus pour l'Angleterre par M. Giffen.

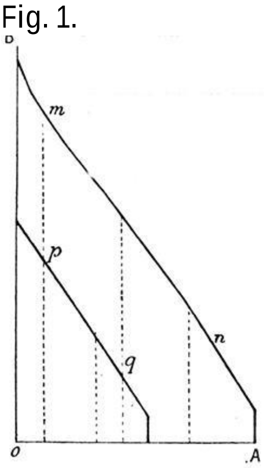
Angleterre

x	N		Log N	
£	1843	1879-80	1843	1879-80
150	106 637	320 162	5,02791	5,50537
200	67 271	190 061	4.82783	5.27889
300	38 901	101 616	4,58996	5,00696
400	25 472	61 720	4,40606	4,79043
500	18 691	45 219	4,27163	4.65532
600	13 911	33 902	4,14336	5,53023
700	11 239	27 008	4.05073	4,43149
800	9 365	22 954	3,97151	4,36086
900	7 923	19 359	3,89889	4,28688
1 000	7 029	17 963	3,84689	4.25438
2 000	2 801	7 611	3,44731	3.88144
3 000	1 566	4 480	3,19479	3.65128
4 000	1 040	3 050	3,01703	3,48430
5 000	701	2 292	2.84572	3,36021
10 000	208	853	2.31206	2,93095
50 000	8	68	0.90309	1.83251

Traçons deux axes OA et OB. Sur OA portons les logarithmes de *x*, sur OB portons les logarithmes de N.

Nous sommes de suite frappé du fait que les points ainsi déterminés ont une tendance très marquée à se disposer en ligne droite. Pour l'Angleterre, en 1879-80. on obtient la ligne *m n.*

Fig. 1.



Mais il y a plus. Si nous considérons d'autres pays, non seulement nous retrouvons la propriété que présentent ces points de tendre à le disposer en ligne droite, mais encore nous observons que les lignes droites ainsi tracées font, avec l'axe des abscisses des angles qui ne sont pas très différents l'un de l'autre. Sur la figure 1, la ligne *pq* représente les revenus constatés dans un certain nombre de villes italiennes. Nous verrons plus loin plusieurs autres exemples analogues.

Si nous tracions, pour ces différents pays, les courbes de mortalité, nous trouverions des résultats bien plus divergents que ceux qui nous sont donnés par les courbes de la répartition des revenus.

Nous nous trouvons ici en présence d'une loi naturelle, qui nous révèle une tendance des revenus à se grouper d'une certaine façon, au moins dans les sociétés et pour les époques considérées. Il est donc important d'étudier avec plus de détail cette loi, telle que nous la fait connaître l'expérience.

Observons, d'abord, que si nous traçons, à une échelle beaucoup plus grande que celle de la figure 1 la courbe des logarithmes de N, nous verrons que la ligne qui, au premier aspect, nous paraissait une ligne droite, est en réalité une courbe qui, en général, est très peu concave vers l'axe des A. Nous réservons cette considération pour une seconde approximation du phénomène, et nous commençons par étudier la première approximation donnée par une ligne droite.

L'équation de cette ligne peut se représenter par

(1) $\text{Log } N = \text{Log } A - x \text{ Log } x$:

ce qui donne

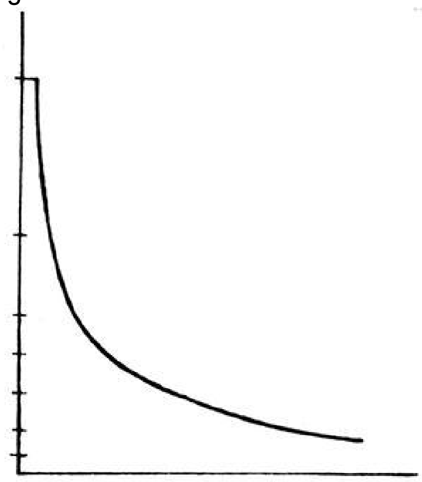
(2)

$$(2) \qquad N = \frac{A}{x^{\alpha}}.$$

Cette dernière équation représente la courbe de répartition des revenus.

Pour avoir les constantes A et α, nous interpolerons les logarithmes de N. Cette interpolation sera faite suivant la méthode de Cauchy, qui est très suffisante pour cette première approximation. On peut même souvent employer une méthode graphique.

Fig. 2.



Nous avons déjà indiqué la répartition des revenus en Angleterre. Voici les résultats de quelques autres statistiques.

VILLES ITALIENNES[1]		PRUSSE[2]			
x Francs	N	x Marks	N 1876	N 1881	N 1886
1 000	59 486	420	5 155 324	5 224 654	5 557 107
2 000	26 968	1 650	450 567	472 910	522 321
4 000	9 766	4 800	66 319	75 720	88 639
7 000	4 264	16 800	8 033	8 785	10 860
10 000	2 397	84 000	532	543	737
15 000	1 310				
25 000	645				

SAXE			BALE[3]		PARIS[4] (LOYERS)	
x Marks	N 1880	N 1886	x Francs	N	x Francs	N
500	540 435	691 183	800	17 324	400	278 664
800	260 924	336 594	1 500	6 664	700	129 696
1 600	93 747	115 337	2 200	4 514	1 000	86 398
3 300	30 379	39 127	4 000	2 039	2 000	38 399
4 800	16 584	22 384	10 000	658	4 000	14 490
9 600	5 503	8 111	20 000	314	10 000	2 419
100 000	119	222	40 000	128	20 000	459
			100 000	36		

[1] Ce sont les communes de Ancona, Arezzo, Belluno, Bologna, Cuneo, Ferrara, Firenze, Foggia, Grosseto, Mantova, Massa, Modena, Parma, Pavia, Perugia, Pesaro, Pisa, Reggio-Emilia, Siena, Sondrio, Trévise, Udine, Vicenza. Les résultats des statistiques officielles ont été résumés par M. le professeur R. Benini. On les trouve reproduits dans l'ouvrage de M. le professeur Martello : *L'imposta progressiva*.

[2] Sœtbeer : *Zür Einkommenstatistik von Prussen, Sachsen*, etc.

[3] K. Bücher : *Basel's Staatseinnahmen und Steuervertheilung*.

[4] Bulletin de statistique et de législation comparée. Septembre 1890.

Nous obtenons pour α les valeurs suivantes :

	α		α
Angleterre 1843 . . .	1,50	Prusse 1894	1,60
» 1879-80 . .	1,35	Saxe 1880	1,58
Prusse[5] 1876	1,72	» 1886	1,51
» 1881	1,73	Villes italiennes . . .	1,45
» 1886	1,68	Paris (loyers)	1,57

[5] Nombre des revenus.

(3) $\Delta = \text{Log } N - \text{Log } N'$

Pour avoir une idée de l'approximation ainsi obtenue, calculons les différences Δ entre les logarithmes des nombres observés N et les logarithmes des nombres calculés N'.

Prusse

NOMBRE DES REVENUS				NOMBRE DES CONTRIBUABLES		
1876	1881	1886	1894	1876	1881	1886
$\alpha = 1.721$	$\alpha = 1.726$	$\alpha = 1.679$	$\alpha = 1.598$	$\alpha = 1.720$	$\alpha = 1,726$	$\alpha = 1.684$
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
+ 0,0341	+ 0.0100	+ 0,0167	− 0.0273	+ 0,0326	+ 0,0097	+ 0,0024
+ 0,0005	+ 0,0129	− 0,0125	+ 0,0273	− 0,0014	− 0,0077	+ 0,0055
− 0,0335	− 0,0025	− 0,0042	+ 0,0060	− 0,0311	− 0,0010	− 0,0094
− 0.0127	+ 0,0012	− 0,0023	− 0.0061	− 0.0120	+ 0.0013	− 0,0044
+ 0,0127	− 0.0012	+ 0,0026	—	+ 0,0120	− 0,0014	+ 0.0045

Saxe

NOMBRE DE REVENUS	
1880	1886
Δ	Δ
− 0.0137	+ 0,0076
− 0.0166	+ 0.0031
+ 0,0148	− 0,0078
+ 0,0244	− 0.0029
+ 0,0192	+ 0.0001
+ 0.0169	+ 0,0135
− 0,0360	− 0.0135

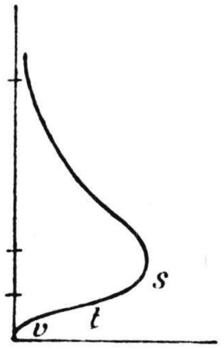
Ces résultats sont très remarquables. Il est absolument impossible d'admettre qu'ils sont dus au hasard. Il y a bien certainement une *cause* qui produit la tendance des revenus à se disposer suivant une certaine courbe.

Cette cause paraît ne dépendre que faiblement des différentes conditions économiques des pays considérés, puisque les effets sont à peu près les mêmes pour des pays aussi différents que le sont l'Angleterre, l'Allemagne et l'Italie.

On avait déjà observé que la courbe des revenus affectait une forme analogue à celle qui est indiquée par la fig. 2 ; mais l'on n'avait pas encore donné l'expression analytique de cette courbe[1]. Certains auteurs[2] , en se laissant guider par des conceptions théoriques, donnent à la partie inférieure de la courbe la forme *s t v* fig. 3. La statistique ne nous fournit aucune indication dans ce sens. Il est donc fort probable que la partie *s t v* est très écrasée, et que la courbe réelle affecte une forme analogue à celle qu'indique la fig. 4. Passons maintenant à la seconde approximation.

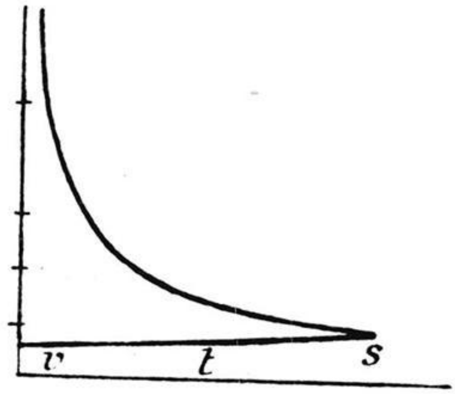
[1] Nous avons donné, pour la première fois, cette expression dans le *Giornale degli Economisti*, Roma, janvier 1895.
[2] Otto Ammon : *Die Gesellschaftsordnung und ihre natürlichen Grundlagen*. — Jena 1895, p. 83, 86 et surtout p. 129 et suivantes.

Fig. 3.



C'est pour le grand-duché d'Oldenbourg, que la concavité de la ligne des logarithmes est la plus considérable. Il ne faudrait pas se bâter d'en conclure que cette forme existe réellement. Les déclarations des contribuables pour l'impôt sur le revenu sont toujours sujettes à caution. Quelque cause spéciale peut produire le phénomène qui s'observe pour le grand-duché d'Oldenbourg. Il sera donc prudent de ne faire usage qu'avec une grande réserve des résultats de ce cas extrême.

Fig. 4.



La ligne des logarithmes est interpolée par une courbe dont l'expression est

(4) $\text{Log } N = \text{Log } A - \alpha \text{ Log } (x + a) - \beta x$

Pour le grand-duché d'Oldenbourg, en 1890,

$\text{Log } A = 8{,}72204$, $\alpha = 1{,}465$, $a = 220$, $\beta = 0{,}0000274$

Comparons les logarithmes des nombres observés aux logarithmes des nombres calculés.

Grand-duché de Oldenbourg, 1890.

x	N	LOGARITHMES observés	LOGARITHMES calculés	Δ
300	54 309	4,7349	4,7349	0,0000
600	24 043	4,3810	4,4368	− 0,0558
900	16 660	4,2217	4,2303	− 0,0086
1 500	9 631	3,9837	3,9409	+ 0,0428
3 000	3 502	3.5443	3.5008	+ 0.0435
6 000	994	2,9974	2,9997	− 0,0023
9 000	445	2,6484	2.6671	− 0,0187
15 300	140	2.1461	2,1838	− 0,0377
30 000	25	1.3979	1,3364	+ 0,0615

Pour d'autres pays, ou a des valeurs de *a* et de β, encore plus petites, et qui, en bien des cas, paraissent être d'un ordre de grandeur inférieur à celui des erreurs d'observation.

La formule (4) donne

$$(5) \qquad N = \frac{A}{(x+a)^{\alpha}} 10^{-\beta x}$$

C'est probablement la forme générale des courbes de distribution. Mais *a* et β étant assez petits, en bien des cas, on a simplement

$$N = \frac{A}{x^{\alpha}} .$$

Ces formules ne peuvent servir qu'à représenter l'ensemble des phénomènes. Elles ne sauraient, évidemment, nous en indiquer les détails. De même, les tables de mortalité *ajustées* représentent le phénomène en général, mais, pour une année déterminée, le taux de mortalité observé peut différer considérablement du taux de mortalité donné par la table.

La tendance des revenus à se grouper suivant une certaine loi pourrait bien dépendre, en grande partie, de la nature même des hommes. Il serait intéressant de pouvoir comparer aux résultats actuels ceux qui appartiennent au passé. Mais il faudrait pour cela avoir des statistiques, suffisamment précises, des revenus pris dans leur ensemble. Il faut bien faire attention que la loi de répartition des différentes catégories de revenus n'est pas la même. La richesse, mobilière, par exemple, ne se répartit pas comme la richesse foncière[3].

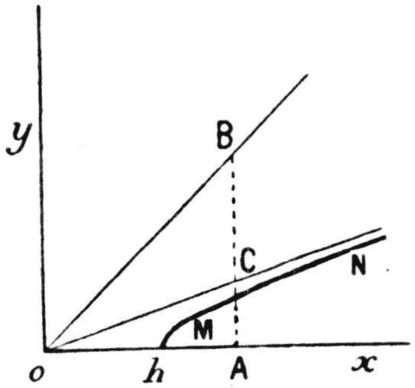
II

Les conséquences que l'on peut tirer de la loi générale de la répartition des revenus, sont aussi nombreuses que variées. Les exposer toutes serait faire un exposé complet de la théorie de la répartition des richesses. Nous ne nous y arrêterons pas ici, et nous nous contenterons de donner un exemple du parti que l'on peut tirer de la connaissance de la loi de la répartition des revenus.

[3] Denys d'Halicarnasse, dans un passage bien connu, dit qu'à Rome le nombre des citoyens les plus pauvres était aussi considérable que celui de tous les autres, pris ensemble. Sans attacher trop d'importance à ce rapprochement, on peut observer qu'en prenant, par exemple, la statistique des revenus en Saxe, le nombre des citoyens ayant un revenu de 500 à 800 marks est à peu près égal au nombre des citoyens ayant un revenu supérieur à 800 marks. Les revenus actuels de 500 à 800 marks peuvent correspondre à ce qu'étaient autrefois les revenus des citoyens les plus pauvres. Les esclaves représentent la partie de la population dont, actuellement, les revenus sont au-dessous de 500 marks.

On veut établir un impôt progressif, et l'on demande quel est te taux de l'impôt proportionnel qui lui est équivalent. Commençons par observer qu'on peut, d'une infinité de manières, établir un impôt progressif remplissant les conditions suivantes : 1° L'impôt est constamment progressif ; 2° Même prolongé indéfiniment, il n'absorbe jamais la totalité des revenus.

Fig. 5.



Traçons deux axes rectangulaires *ox, oy*, et la droite *o* B, inclinée de 45° sur *ox*. La ligne AB = *o*A représente un revenu quelconque. *Ac* étant, par exemple, le 10% de BA, la ligne *oC* représente un impôt proportionnel de 10 % sur tout les revenus[4]. Une courbe MN, qui a pour asymptote *o*C, représente un impôt progressif remplissant les deux conditions que nous nous somme posées.

Il existe évidemment une infinité de courbes de ce genre. Une des plus simples est représentée par l'équation

$$y = m\left(\frac{x-h}{x}\right)$$

Un impôt progressif ayant cette expression, jouit des propriétés suivantes. 1° Il atteint seulement les revenus supérieurs à *h* ; 2° Il n'absorbe jamais plus que *m* de chaque revenu. Donc, si, par exemple, *m* = 0,1, il n'absorbe jamais plus de 10 % chaque revenu.

Cherchons maintenant quel est le taux de l'impôt proportionnel qui donnerait le même rendement que cet impôt progressif.

Prenons d'abord la formule (2) :

$$N = \frac{A}{x^{\alpha}} .$$

On en déduit que le nombre *dz* de revenus compris entre *x* et *x* + *dx* est

$$dz = \frac{\alpha A}{x^{\alpha+1}}\, dx . \tag{6}$$

Un impôt proportionnel *p*, frappant ces revenus, donnera pour produit

$$dP = px\,dz = \frac{\alpha A p}{x^{\alpha}}\, dx .$$

[4] Pour que la figure fût plus claire, on a exagéré l'inclinaison de la droite *oC*.

Le produit total de l'impôt s'étendant du revenu *h* au revenu H, sera

$$(7)\qquad P=\int_h^H \frac{\alpha A p}{x^\alpha}\,dx=\frac{\alpha A p}{(\alpha-1)\,h^{\alpha-1}}\left[1-\left(\frac{h}{H}\right)^{\alpha-1}\right].$$

Lorsque α et assez grand on peut négliger

$$\left(\frac{h}{H}\right)^{\alpha-1},$$

et alors on a simplement

$$(8)\qquad P=\frac{\alpha A p}{(\alpha-1)\,h^{\alpha-1}}.$$

Tel est le produit de l'impôt proportionnel. Celui de l'impôt progressif s'obtiendra d'une manière semblable. Si nous le nommons P_1, nous aurons

$$P_1=\int_h^H \frac{\alpha A m}{x^\alpha}\left(\frac{x-h}{x}\right)^n dx\ ;$$

et

$$(9)\qquad P_1=\int_h^\infty \frac{\alpha A m}{x^\alpha}\left(\frac{x-h}{x}\right)^n dx-\int_H^\infty \frac{\alpha A m}{x^\alpha}\left(\frac{x-h}{x}\right)^n dx\ .$$

Si α est assez grand, on peut négliger la dernière intégrale, et poser

$$P_1=\int_h^\infty \frac{\alpha A m}{x^\alpha}\left(\frac{x-h}{x}\right)^n dx$$

Faisons

$$v=\frac{x-h}{x}\ ;$$

nous aurons

$$P_1=\frac{\alpha A m}{h^{\alpha-1}}\int_0^1 v^n(1-v)^{\alpha-2}\,dv\ .$$

Si nous indiquons, comme d'habitude, par B et par Γ les intégrales Eulériennes de première et de deuxième espèce, nous aurons

$$(11)\qquad P_1=\frac{\alpha A m}{h^{\alpha-1}}\,B(n+1,\alpha-1)=\frac{\alpha A m}{h^{\alpha-1}}\,\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(n+\alpha)}\ .$$

Cette expression, remarquablement simple, peut servira donner une idée du produit d'un impôt progressif.

Si nous égalons ce produit à relui que nous avons déjà obtenu pour l'impôt proportionnel (8), nous avons

$$\frac{p}{\alpha - 1} = m \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(n+\alpha)} ,$$

ou

$$p = m \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} . \qquad (12)$$

C'est la formule qui résout le problème que nous nous étions proposé. Elle nous fait connaître le taux d'un impôt proportionnel qui donne le même produit total qu'un impôt progressif. Le taux *p* de l'impôt proportionnel est égale au taux maximum *m* de l'impôt progressif, multiplié par un certain coefficient.

$$C = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} .$$

En particulier, si l'on fait n = 1, 2, 3, on a

$$C = \frac{1}{\alpha} , \quad \frac{2}{\alpha(\alpha+1)} , \quad \frac{6}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} .$$

Pour *n* fractionnaire, on calcule facilement les valeurs de C au moyen des tables de fonctions α.

Valeurs de C

α	$n = 0,2$	$n = 0.5$	$n = 0.8$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1,4	0,912	0,817	0,750	0,714	0,595	0,525
1,5	0,896	0,785	0,707	0,667	0,533	0,457
1,8	0,855	0.707	0,607	0,555	0.397	0,321

Pour avoir une idée des types des impôts progressifs qui correspondent aux différentes valeurs de *n,* calculons l'impôt pour différents revenus, en supposant : 1° Que l'impôt n'atteigne « pie les revenus au-dessus de 2000 fr. ; 2° Que le taux maximum soit de 10 %.

Impôt progressif exprime en pour cent du revenu.

n	REVENUS			
	4000 fr.	10 000 fr.	50 000 fr.	100 000 fr.
0,2	8.70	9.56	9,92	9.96
0.5	7,07	8,94	9.80	9.90
0,8	5,74	8.36	9,68	9.84
1.0	5,00	8,00	9.60	9,80
2,0	2.50	6.40	9.22	9,60
3.0	1.25	5.12	8,85	9.41

Ainsi, si pour une société pour laquelle on a $\alpha = 1{,}5$, ou considère un impôt progressif, tel que les revenus jusqu'à 2000 fr. ne soient pas atteints, que les revenus de 4000 fr. paient 1,25 %, les revenus de 10 000 fr. paient 5,12 %, les revenus de 50 000 fr. paient 8,85%, etc. ; on voit que cet impôt donnera un produit égal à celui d'un impôt uniforme de 4,57 %.

Lorsque α est égal ou inférieur à 1, on ne peut plus négliger la portion de l'intégrale comprise entre H et l'infini. Pour $\alpha = 1$, $n = 1$, on aurait

$$P = Ap \log \frac{H}{h} ,$$

$$P_1 = Am \left[\log \frac{H}{h} - \frac{H-h}{H} \right]$$

d'où l'on tire

$$p = m \left[1 - \frac{H-h}{H \log \frac{H}{h}} \right] .$$

Donnons, enfin, un exemple de l'application de la formule générale (5). Cette équation peut s'écrire

$$N = \frac{A}{(x+a)^{\alpha}} e^{-bx} , \qquad b = \beta \log 10 .$$

Nous aurons donc

$$P = -\int_h^{\infty} p \frac{dN}{dx} x dx$$

et, en supposant $n = 1$,

$$P_1 = -\int_h^{\infty} m \frac{dN}{dx} (x-h)\, dx .$$

La première équation donne

$$P = p\,(Nx)_h + p \int_h^{\infty} N dx ;$$

et la seconde,

$$P_1 = m \int_h^{\infty} N dx .$$

Posons

$$z = b\,(x+a) , \qquad k = b\,(h+a) ,$$

$$T_{\alpha} = \int_k^{\infty} \frac{e^{-z}}{z^{\alpha}} dz ;$$

nous aurons

$$\frac{1}{A}\int_k^\infty N dx = e^{ba} b^{\alpha-1} T_\alpha \ ,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{A} P = p \frac{h e^{-bh}}{(a+h)^\alpha} + p e^{ba} b^{\alpha-1} T_\alpha \ ,$$

$$\frac{1}{A} P_1 = m e^{ba} b^{\alpha-1} T_\alpha$$

En égalant ces deux quantités, l'on obtiendra

$$m = p \left[1 + \frac{(\alpha-1) hb}{k - e^k k^\alpha T_{\alpha-1}} \right] .$$

D'autre part

$$T_{\alpha-1} = \Gamma(2-\alpha) - S \ ,$$

$$S = \frac{k^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{k^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{k^{4-\alpha}}{1.2\,(4-\alpha)} - \dots$$

Pour le grand-duché d'Oldenbourg, nous avons

$$\alpha = 1{,}465 \ , \quad a = 220 \ , \quad b = 0{,}0000631$$

et nous trouvons

$$\frac{p}{m} = 0{,}555 \ .$$

Si nous n'avions pas tenu compte de la correction donnée par le facteur exponentiel, c'est-à-dire si nous avions fait simplement

$$(13) \qquad N = \frac{A}{(x+a)^\alpha} \ ,$$

nous aurions eu

$$\frac{m}{p} = 1 + (\alpha - 1) \frac{h}{h+a} \ .$$

En ce cas la valeur de α est

$$\alpha = 1{,}834$$

ce qui donne

$$\frac{p}{m} = 0{,}571 \ .$$

Si l'on avait employé la formule

$$\text{(14)} \qquad N = \frac{A}{x^{\alpha}} \, .$$

on aurait eu

$$\alpha = 1{,}666 \, ,$$

et

$$\frac{p}{m} = 0{,}600 \, .$$

Ces valeurs de p/m ne sont pas très différentes l'une de l'autre, ce qui fait voir que, pour des problèmes de ce genre, on peut obtenir une première approximation en employant simplement les formules (13) ou (14).

On résoudrait, d'une manière semblable et très facilement, d'autre problèmes sur la répartition des impôts.